ECOLE DE L'AIR *CONCOURS PC/PSI* 4 heures

Les questions du problème peuvent être traitées dans un ordre arbitraire, sous réserve qu'on ne fasse pas usage des résultats postérieurs pour résoudre les questions antérieures.

$\mathbb{N}$ (respectivement $\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$) désigne l'ensemble des nombres entiers naturels (respectivement réels, complexes).

On admet que la somme $S(z)$ d'une série entière de rayon de convergence $r_0 \in [0,+\infty[$, de la forme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^k,$$

est définie et continue dans le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r_0\}$. De plus, la série dérivée

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k u_k z^{k-1}$$

a le même rayon de convergence r_0, et sa somme $S'(z)$ vérifie l'identité :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < r_0,\ S'(z) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} h^{-1}\big(S(z+h) - S(z)\big)$$

PROBLEME

Première question.

1.a. Montrer que le rayon de convergence, noté R, de la série entière

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} z^k \tag{1.1}$$

vérifie l'égalité $R = 1$. On note $h(z)$ la somme

$$h(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} z^k \tag{1.2}$$

de cette série, définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$.

Dans la suite du problème, on conservera la notation R pour désigner la rayon de convergence de la série entière (1.2), et on admettra sans démonstration que la valeur numérique de cette constante est $R = 1$.

1.b. On fixe un réel ρ tel que $0 < \rho < 1$. Montrer que

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \rho^k R^k = 0.$$

En déduire l'existence d'un entier $n_\rho \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq n_\rho$ et $N \geq n_\rho$, on ait

$$\left| h(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} z^k \right| \leq \rho^n \text{ et } \left| \frac{(2N)!}{2^{2N}(N!)^2} z^N \right| \leq \rho^N \quad \forall z \in \mathbb{C} : |z| < \rho^2 R. \tag{1.3}$$

1.c. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R = 1$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

(1.4) $$\varepsilon_n(z) = h(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} z^k .$$

Vérifier l'inégalité, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$

(1.5) $$\left| h^2(z) - \sum_{k=0}^{n} z^k \sum_{m=0}^{k} \frac{(2m)!(2k-2m)!}{2^{2k}(m!(k-m)!)^2} \right| \le \sum_{k=n+1}^{2n} |z|^k \sum_{m=k-n}^{n} \frac{(2m)!(2k-2m)!}{2^{2k}(m!(k-m)!)^2} + 2\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} z^k \right| \times |\varepsilon_n(z)| + |\varepsilon_n(z)|^2 .$$

Deuxième question.

2.a. On considère les fonctions réelles de la variable réelle $x \neq 1$ définies par

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \text{ et } G(x) = H^2(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer les dérivées d'ordre n, $G^{(n)}$ et $H^{(n)}$ de $G = G^{(0)}$ et $H = H^{(0)}$ en $x \neq 1$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(2.1) $$H^{(n)}(0) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \text{ et } G^{(n)}(0) = n!$$

2.b. En exprimant $G^{(n)}$ en fonction de $H^{(0)}, \ldots, H^{(n)}$, établir l'identité, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(2.2) $$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!(2n-2k)!}{2^{2n}(k!(n-k)!)^2} = 1.$$

Troisième question.

On suppose que $h(z)$ et $R = 1$ sont définis comme en (1.2) et dans la question **1.a**.

3.a. On fixe un réel ρ tel que $0 < \rho < 1$, et on admet l'existence de n_ρ tel que (1.3) soit satisfaite pour tout $n \ge n_\rho$ et $N \ge n_\rho$. On admet également l'inégalité (1.5) pour $n \in \mathbb{N}$ et $|z| < R = 1$.

Montrer l'existence d'une constante $C_\rho \in \mathbb{R}$, telle que, $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \le \rho^2 R = \rho^2$ et $\forall n \ge n_\rho$, on ait :

(3.1) $$\left| h^2(z) - \sum_{k=0}^{n} z^k \right| \le \rho^n C_\rho .$$

En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R = 1$, on a

(3.2) $$h^2(z) = \frac{1}{1-z} .$$

3.b. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, montrer qu'il existe deux réels r et θ vérifiant $r > 0$ et $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, définis de manière unique par l'identité $z = 1 - re^{i\theta}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, $r > 0$ et $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, vérifiant $z = 1 - re^{i\theta}$ comme ci-dessus, on pose

(3.3) $$\sqrt{1-z} = \sqrt[+]{1-z} = r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ et } \sqrt[-]{1-z} = -r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} = -\sqrt[+]{1-z} .$$

On fixe un réel ρ tel que $0 < \rho < 1$, et on désigne par $\eta(z)$ une fonction à valeurs complexes de $z \in \mathcal{D}_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \rho R\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \rho\}$. On suppose que

(i) $\eta(z)$ est une fonction continue de $z \in \mathcal{D}_\rho$;

(ii) $\eta^2(z) = \dfrac{1}{1-z}$ $\forall z \in \mathcal{D}_\rho$.

Montrer qu'alors, on a

- ou bien $\eta(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1-z}}$ $\forall z \in \mathcal{D}_\rho$,
- ou bien $\eta(z) = \dfrac{1}{-\sqrt{1-z}}$ $\forall z \in \mathcal{D}_\rho$.

En déduire que

$$h(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}} = \frac{1}{-\sqrt{1-z}} \quad \forall z \in \mathbb{C},\ |z| < R = 1 \tag{3.4}$$

Quatrième question.

Dans cette question, on admet les résultats des question **1**, **2** et **3**. En particulier, on note R le rayon de convergence de la série (1.1). On admet que $R = 1$ ainsi que l'identité (3.4). Pour tout $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \rho < 1$, on admet l'existence de $n_\rho \in \mathbb{N}$ tel que les relations (1.3) soient satisfaites pour tout $n \geq n_\rho$ et $N \geq n_\rho$. On admet également l'existence l'existance d'une constante $C_\rho \in \mathbb{R}$ telle que l'inégalité (3.1) soit satisfaite pour tout $n \geq n_\rho$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq \rho^2 R = \rho^2$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note g_x la fonction qui, compte tenu de (3.3)-(3.4), associe à tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|2xz - z^2| < R$ le nombre

$$g_x(z) = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \in \mathbb{C}. \tag{4.1}$$

4.a. On pose

$$R_x = \frac{R}{R+2|x|} = \frac{1}{1+2|x|}.$$

Montrer que, pour tout $0 < \rho < 1$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq \rho^2 R_x$, pour tout $n \geq n_\rho$ et $N \geq n_\rho$, on a les inégalités

$$\left| g_x(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}(2xz - z^2)^k \right| < \rho^n \text{ et } \frac{(2N)!}{2^{2N}(N!)^2}\left(2|xz| + |z|^2\right)^N \leq \rho^N. \tag{4.2}$$

Justifier, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_x$, l'identité

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}(2xz - z^2)^k. \tag{4.3}$$

4.b. Montrer l'existence d'une suite $\{Q_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$ de polynômes réels de la variable réelle x, tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$,

$$\left| \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}(2xz - z^2)^k - \sum_{k=0}^{2n} Q_k(x) z^k \right| \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\left(2|xz| + |z|^2\right)^k.$$

En déduire l'identité, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R_x$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} Q_k(x) z^k . \tag{4.4}$$

Montrer l'unicité de la suite $\{Q_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$ vérifiant (4.4).
Déterminer les polynômes $Q_0(x)$, $Q_1(x)$ et $Q_2(x)$.

Cinquième question.

Dans cette question, on admet sans démonstration l'identité (4.4) pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_x$.

5.a. Etablir l'identité suivante, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, $|z| < R_x$.

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}\right\} = \sum_{k=1}^{+\infty} k Q_k(x) z^{k-1} . \tag{5.1}$$

Comparer les expressions

$$(1-2xz+z^2)\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}\right\} \text{ et } \frac{x-z}{\sqrt{1-2xz+z^2}}.$$

En déduire que les polynômes $\{Q_k : k \in \mathbb{N}\}$ satisfont le système de relations récurrentes

$$(n+1)Q_{n+1}(x) - (2n+1)xQ_n(x) + nQ_{n-1}(x) = 0 \text{ pour } n \geq 1. \tag{5.2}$$

5.b. On définit une suite de polynômes par la formule

$$Q_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(x^2-1)^n\right\}. \tag{5.3}$$

Evaluer, par dérivations successives,

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{(x^2-1)^n\right\} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{\frac{d}{dx}(x^2-1)^n\right\},$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{(x^2-1)^n\right\} = \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left\{\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^n\right\}.$$

En déduire que $\frac{d^n}{dx^n}\left\{(x^2-1)^n\right\}$ s'exprime de manière simple en fonction de

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{(x^2-1)^{n-1}\right\} \text{ et } \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left\{(x^2-1)^{n-2}\right\}.$$

Montrer que la suite $\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$ définie par (5.3) vérifie les relations (5.2), et en deduire que cette suite coïncide avec la suite définie par (4.4).

5.c. Vérifier les relations pour tout $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)Q_n(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{si } m = n. \end{cases}$$